Modeling of Conditional Index Changes

Modellierung von bedingten Index–Wechseln

Matthias Krebs (kyb)

Diplomarbeit
Prof. Dr.-Ing. M.Zeitz

Betreuer: Prof. François E. Cellier
University of Arizona — Tucson, AZ / U.S.A.
Department of Electrical and Computer Engineering

Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. E. D. Gilles
Universität Stuttgart 1997

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit wurde an der *University of Arizona–Tucson* als *Thesis*[1] für den *Master of Science in Electrical and Computer Engineering* verfaßt. Vom September 1995 bis Mai 1996 nahm ich über ein Auslands–DAAD–Stipendium an dem "Integrierten Auslandsstudium(IAS)" zwischen dem Institut für Energiewirtschaft und Rationelle Energieanwendung der Universität Stuttgart und dem *Department of Nuclear and Energy Engineering* an der *University of Arizona–Tucson* teil. Danach war ich von Mai 1996 bis Dezember 1996 als *Research Assistant* am *Department of Electrical and Computer Engineering* in dem *Gyrossphere* Projekt von Prof. François E. Cellier angestellt, unter dessen Anleitung diese Arbeit entstand. Von Januar 1997 bis August 1997 war ich als *Teaching Assistant* für die Enwicklung von *Webpages* für einen interaktiven, virtuellen Klassenraum für den Kurs ECE 220 – *Basic Circuits* zuständig. Dabei arbeitete ich mit Prof. Larry C. Schooley, dem *Chairman of Graduate Studies* des *Department of Electrical and Computer Engineering*, zusammen. Am 7. Oktober 1997 schloß ich meine Studium an der *University of Arizona–Tucson* mit dem *Master of Science* in *Electrical and Computer Engineering* ab.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einer neuen Idee zur Modellierung von bedingten Index–Wechseln bei Differential–Algebraischen–Gleichungs–Systemen (DAE). Solche Index–Wechsel treten häufig bei der Modellierung und Simulation von passiven Schaltkreisen (*Linear Circuit Theory*) mit Schaltern auf. Die objektorientierte Modellierungssprache Dymola erlaubt es elektrische Schaltkreise mit idealen Schaltelementen zu modellieren.

Ein elektrischer Stromkreis, der Schaltelemente enthält, repräsentiert ein Modell mit variabler Struktur. Die Struktur der Schaltung wird durch zwei mögliche Schalterstellungen, "geöffnet" und "geschlossen", bestimmt. Das Verhalten eines idealen Schaltelements kann durch eine Schaltgleichung, die eine diskrete Variable zur Beschreibung der Schalterstellung beinhaltet, beschrieben werden:

$$0 = OpenSwitch \cdot I + (1 - OpenSwitch) \cdot U \tag{1}$$

In dieser Gleichung ist *OpenSwitch* die diskrete Variable, die den Wert 1 hat, wenn der Schalter geöffnet ist, und den Wert 0 annimmt, wenn der Schalter geschlossen ist. Die

[1] Englischsprachige Begriffe, die nicht direkt übersetzt werden können, sind kursiv gedruckt.

Gleichung beschreibt somit das Verhalten eines idealen Schalters. Der Strom I durch den geöffneten Schalter ist gleich 0, während der Spannungsabfall U am geschlossenenen Schalter den Wert 0 annimmt.

Die Modellierung von einem passiven Stromkreis mit Schaltelementen führt im allgemeinen auf ein DAE–System mit Index–Wechseln, die durch die Schaltelemente hervorgerufen werden. Für eine numerische Simulation ist es von Vorteil, die DAE–Form in ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (ODE) und expliziten algebraischen Gleichungen zu überführen. Eine solche Darstellung wird im allgemeinen als *State Space Model* bezeichnet. Diese Transformation ist nur möglich, wenn die Schaltgleichungen (1) nicht separat gelöst werden müssen. Dies folgt daraus, daß bei der alleinigen Verwendung von Gleichung (1) und deren Auflösung nach der Spannung

$$U = \frac{OpenSwitch}{(OpenSwitch - 1)} \cdot I \qquad ; \qquad OpenSwitch \neq 1 \tag{2}$$

oder dem Strom

$$I = \frac{(OpenSwitch - 1)}{OpenSwitch} \cdot U \qquad ; \qquad OpenSwitch \neq 0 \tag{3}$$

Gleichungen entstehen, die nur in einer der beiden Schalterstellungen verwendet werden dürfen, da in der anderen Schalterstellung eine Division durch 0 auftritt. Damit ist die Kausalität eines Schalters aber bereits vor der Simulation festgelegt.

Dieses Problem kann durch das gleichzeitige Lösen der Schaltgleichung (1) zusammen mit zusätzlichen Gleichungen, d.h. eines algebraisch verkoppelten Systems, vermieden werden.

Im linearen Fall eines passiven Stromkreises kann das DAE–System mit Schaltgleichungen (1) in einer Matrixform geschrieben werden. Bei der Lösung des algebraischen Systems muß dann die Determinante der Systemmatrix ungleich null sein, ohne daß der Nenner von Gleichung (2) oder (3) benötigt wird. Physikalisch kann die Forderung nach einer algebraischen Struktur damit erklärt werden, daß vor der Festlegung der diskreten Schaltvariablen beide Schalterstellungen möglich sein müssen. Dies wiederum entspricht einer nicht festgelegten Struktur und damit einer algebraischen Struktur.

Bei der Erweiterung dieser Idee auf komplexe Stromkreise werden die algebraischen Strukturen jedoch durch das Auftreten von abhängigen Speicherelementen zerstört.

Abhängige oder nicht–minimal modellierte Speicherelemente werden bei einem DAE–System durch einen Index von 2 oder größer charakterisiert. Speziell beim Auftreten von Schaltelementen mit diesen *Higher–Index*–Problemen funktioniert der zur Index–Reduzierung eingesetzte Pantelides–Algorithmus nicht mehr. Bei der Index–Reduzierung werden Gleichungen nach der Zeit abgeleitet, was jedoch bei der Formulierung der Schaltgleichung nicht möglich ist.

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit war einen Algorithmus zu finden, der die Schaltgleichung so modifiziert, daß selbst bei einem *Higher–Index*–Problem die notwendigen algebraischen Strukturen geschaffen werden. Die möglichen Modifizierungen der Schaltgleichung (1) bestehen darin, daß der Stromterm I durch dessen n_1–te Ableitung und der Spannungsterm U durch dessen n_2–te Ableitung ersetzt wird:

$$0 = OpenSwitch \cdot \frac{\partial^{n_1} I}{\partial t^{n_1}} + (1 - OpenSwitch) \cdot \frac{\partial^{n_2} U}{\partial t^{n_2}} \qquad . \tag{4}$$

Dabei sind die Parameter n_1 und n_2 für die jeweilige Schaltgleichung so zu bestimmen, daß algebraische Strukturen für die jeweilige Schaltgleichung geschaffen werden. Zu Gleichung (4) gehören $n_1 + n_2$ konsistente Anfangsbedingungen, die sicherstellen, daß die Gleichung dieselbe Forderung wie die ursprüngliche Schaltgleichung darstellt.

In der Arbeit wurde beispielhaft eine einfache Schaltung mit zwei Dioden, einem Kondensator, einer Spule und einem Widerstand untersucht, die im Fall der ursprünglichen Schaltgleichungen (1) nicht die nötigen algebraischen Strukturen hat. Dabei werden die Dioden in der objektorientierten Modellierungssprache Dymola als Klasse beschrieben, die das Verhalten eines Schalters vererbt bekommt und das Verhalten einer Diode hinzufügt. Nachfolgend ist die objektorientierte Darstellung einer Diode, die von einer allgemeinen Schaltelement–Klasse erbt, in Dymola angegeben:

```
model class (Switch) Diode
   new(OpenSwitch) = if ((not U>0) and (not I>0)) then 1 else 0
end
```

In Kapitel 4 wird mit einem kombinierten graphisch–analytischen Verfahren gezeigt, daß es für den Beispiel–Stromkreis keine modifizierten Schaltgleichungen gibt, um die benötigten algebraischen Strukturen zu schaffen. *Dependence*–Graphen werden für diesen Teil so modifiziert, daß damit algebraische Strukturen dargestellt werden können.

Mit diesen Graphen erfolgt dann die Herleitung von notwendigen Bedingungen für die Bestimmung der Ableitungsordnungen n_1, n_2, n_3 und n_4, wobei zuerst unabhängige algebraische Strukturen und später gegenseitig verkoppelte algebraische Strukturen gefordert werden. Da diese Bedingungen sich wiedersprechen, gibt es auch mit der Modifikationsidee (4) keine Transformation auf Zustandsdarstellung für dieses Beispiel.

Um die graphische Methode zur Herleitung von Bedingungen für die Ableitungsordnungen zu verifizieren, wurde ein weiteres Beispiel untersucht. Dieses zweite Beispiel unterscheidet sich nur in der Verschaltung der Elemente von dem ersten Beispiel und besteht aus einer Spule in Reihe mit einer Diode und einem Kondensator parallel zu einer Diode. Genau für diese beiden Fälle waren die Modifikationen der Schaltgleichung (4) bereits bekannt. Bei einer Spule in Reihe mit einer Diode muß der Stromterm durch die erste Ableitung des Stroms ersetzt werden, während bei einem Kondensator parallel zu einer Diode der Spannungsterm durch die erste Ableitung der Spannung ersetzt wird. Die graphische Herleitung der Bedingungen für die Ableitungsordnungen n_1, n_2, n_3 und n_4 resultierte in exakt den gleichen bereits bekannten Modifikationen der Schaltgleichungen (4). Daraus folgt, daß die graphische Methode zu den richtigen Modifikationen führt und damit eine Transformation auf Zustandsdarstellung ermöglicht.

Da die graphische Methode im zweiten Beispiel zu den richtigen Modifikationen führt und für das erste Beispiel zu keiner Lösung führt, kann gefolgert werden, daß die Modifikationen der Schaltgleichung (4) nicht immer eine Transformation auf Zustandsdarstellung ermöglichen. Die Modifikationsidee kann also nicht jeden elektrischen Stromkreis auf Zustandsdarstellung überführen und wurde daher verworfen. Die Arbeit an den Graphen und daraus abgeleiteteten Bedingungen war aber nicht nutzlos. Durch den Versuch, die Bedingungen zu lockern, ergab sich eine neue Idee, *Differenzen–Formeln* zur Approximation von Zeitableitungen zu verwenden.

Diese Vorgehensweise entspricht der numerischen Lösung von DAE–Problemen mit DAE–Solvern. In dem Simulationsprogramm PSpice und anderen elektrischen Simulationssystemen werden Schaltelemente durch nichtideale Elemente modelliert, was in den Problemfällen, wenn die ideale Schaltgleichung eine Division durch null ergeben würde, zu einem System mit künstlicher Steifheit führt. Dies wiederum verursacht unnötig lange Rechenzeiten und damit verbundene hohe Simulationskosten.

Die Idee der Verwendung von *Differenzen–Formeln* mit idealen Schaltern, also mit der

Schaltgleichung (1), löst die Problemfälle dagegen ohne diese Nachteile. Die benötigten algebraischen Strukturen werden durch die Approximierung der Differentialgleichungen durch *Differenzen–Formeln* automatisch geschaffen. Bei einem Speicherelement wird die Ableitung durch eine *Differenzen–Formel* approximiert, und das Speicherelement verhält sich somit wie ein einfaches Widerstandselement.

Die Verwendung der *Differenzen–Formeln* wurde anhand eines komplizierten Stromkreises, eines "SCR Controllers for Train Speed Control", mit der einfachsten impliziten *Differenzen–Formel*, der Euler Rückwärts Differenzen–Formel, überprüft und simuliert.

Dabei wurde jedoch klar, daß die *Differenzen–Formel*–Methode eine nicht–minimale Modellierungen von idealen Schaltelementen nicht lösen kann. Nicht–minimale Modellierungen von Schaltelementen beinhalten Schaltelemente in Parallel- und Reihenschaltung, ohne weitere elektrische Elemente zu enthalten. Bei zwei parallelen idealen Schaltern, die beide geschlossen sind, kann der Strom nicht auf die beiden Leitungen verteilt werden. Bei zwei idealen Schaltern in Reihe kann das Potential des Verbindungsstückes zwischen den beiden Schaltelementen nicht bestimmt werden. Dies beruht jedoch auf Problemen der nicht–minimalen Modellierung von idealen Schaltelementen und muß bei der Modellierung oder Simulation vermieden werden. Die vorherigen Problemfälle mit Divisionen durch null bei Index–Wechseln werden jedoch von der Differenzen–Formel–Methode gelöst.

Der erste Teil der Arbeit zeigte, daß der Umweg über eine ODE–Formulierung mit einer Modifikationen der Schaltgleichung (4) im allgemeinen nicht möglich ist. Der zweite Teil der Arbeit zeigte, daß dieser Umweg gar nicht nötig ist, und daß ideale Schaltelemente mit einem DAE–Solver ohne die Modifikationsidee gelöst werden können. Lediglich bei nicht–minimalen Schaltelement–Konfigurationen funktioniert diese Vorgehensweise nicht, und in diesen Fällen müssen reale Schaltelemente verwendet werden, die Schaltlogik modifiziert werden oder Widerstände eingefügt werden. Mit einer dieser Veränderungen ist dann die Lösung des Gleichungssystems und deren Simulation möglich.