Analyse diskreter Systeme im Zustandsraum

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

June 22, 2006

Erreichbarkeit, Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit

Erreichbarkeit, Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit

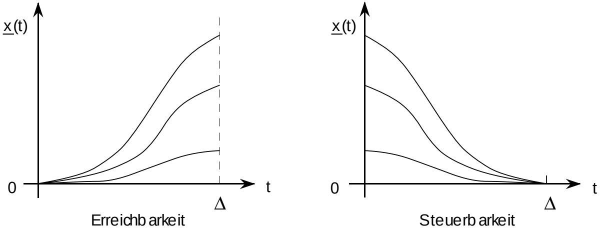

Figure: Erreichbarkeit – Steuerbarkeit

Erreichbarkeit

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0) = \mathbf{b}u(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) = \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1) \\
\mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{b}u(2) = \mathbf{A}^2\mathbf{b}u(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}u(1) + \mathbf{b}u(2) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{b}u(k-1) = \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{A}^{k-2}\mathbf{b}u(1) + \cdots + \mathbf{b}u(k-1)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \mathbf{x}(k) = \sum_{\gamma=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-\gamma-1}\mathbf{b}u(\gamma)
$$

Erreichbarkeit II

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{\gamma=0}^{k-1} \mathbf{A}^{k-\gamma-1}\mathbf{b}u(\gamma)$$

$\mathbf{x}(k)$ kann nur dann ein beliebiger Punkt im n-dimensionalen Raum sein, wenn die Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{C} = [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \qquad n \ldots \text{Ordnung des Systems}$$

den vollen Rang hat.

Der Unterraum der erreichbaren Zustände ist gleich dem Bildraum von $\mathcal{C}$.

Erreichbarkeitszerlegung

Falls der Rang von $\mathcal{C} = \nu < n$, kann eine Ähnlichkeitstransformation Π gefunden werden, so dass:

$$\mathbf{A}_{neu} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{A}_k \\ 0 & \mathbf{A}_{ne} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{neu} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_e \\ 0 \end{bmatrix}$$

mit $[\mathbf{A}_e, \mathbf{b}_e]$ erreichbar und $\mathbf{A}_e \in \mathcal{R}^{\nu \times \nu}$.

Erreichbarkeitszerlegung II

Man wähle Π_1 als Basis im Bildraum von $\mathcal{C}$. Zum Beispiel können die ersten ν linear unabhängigen Kolonnenvektoren von $\mathcal{C}$ gewählt werden.

Man ergänze $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$ um beliebige Vektoren, welche den Rang von Π voll machen.

Somit kann Π invertiert werden:

$$\Pi^{-1} = \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Pi^{-1} \cdot \Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \\ \mathbf{S}_2 \end{bmatrix} \cdot [\Pi_1 \;\; \Pi_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 \cdot \Pi_1 & \mathbf{S}_1 \cdot \Pi_2 \\ \mathbf{S}_2 \cdot \Pi_1 & \mathbf{S}_2 \cdot \Pi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}^{(n)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(\nu)} & \mathbf{0}^{(\nu \times (n-\nu))} \\ \mathbf{0}^{((n-\nu) \times \nu)} & \mathbf{I}^{(n-\nu)} \end{bmatrix}$$

Somit:

$$\begin{array}{rcl} S_1 = \text{"}\Pi_1^{-1}\text{"} & ; & S_2 = \text{"}\Pi_2^{-1}\text{" in einem erweiterten Sinne} \\ S_1 \text{ ist im Nullraum von } \Pi_2 & ; & S_2 \text{ ist im Nullraum von } \Pi_1 \end{array}$$

Erreichbarkeitszerlegung III

Ähnlichkeitstransformation:

$$\mathbf{A}_{neu} = \Pi^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \Pi = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{A}\Pi_1 & \mathbf{S}_1\mathbf{A}\Pi_2 \\ \mathbf{S}_2\mathbf{A}\Pi_1 & \mathbf{S}_2\mathbf{A}\Pi_2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{b}_{neu} = \Pi^{-1} \cdot \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1\mathbf{b} \\ \mathbf{S}_2\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

Somit:

S_2 ist im Nullraum von $\mathbf{b}$ (da $\mathbf{b}$ im Bildraum von Π_1 liegt)

S_2 ist im Nullraum von $\mathbf{A} \cdot \Pi_1$ (auf Grund des Cayley-Hamilton Theorems)

Steuerbarkeit

Bei den diskreten Systemen sind die Bedingungen für Steuerbarkeit und Erreichbarkeit leicht unterschiedlich. Bei den kontinuierlichen Systemen war dies nicht der Fall.

Das Problem hier ist, dass es autonome diskrete Systeme gibt, die in endlicher Zeit von selbst zum Nullpunkt finden. Bei den kontinuierlichen Systemen kommt dies nicht vor.

Wenn die Systemmatrix *nil-potent* ist, d.h.:

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{0} \quad ; \quad k \leq n$$

dann ist das System steuerbar, auch wenn kein einziger Zustand erreichbar ist.

Steuerbarkeit II

Nil-potente Matrizen haben alle Eigenwerte im Ursprung. Systemmatrizen, welche alle Eigenwerte im Ursprung haben sind nil-potent.

Beide Aussagen sind unter Verwendung der Spektralzerlegung leicht zu zeigen.

Nil-potente Systemmatrizen kommen bei diskreten System recht häufig vor ($\longrightarrow$ dead-beat control).

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix

Wir möchten bestimmen, wie schwierig es ist, einen bestimmten Endpunkt zu erreichen. Dazu lösen wir eine Optimierungsaufgabe mit Beschränkungen:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\Delta-1} u^2(k)$$

und die zu erfüllende Nebenbedingung ist:

$$\mathbf{x}(\Delta) = \mathbf{x}_r = \sum_{k=0}^{\Delta-1} \mathbf{A}^k \mathbf{b} \cdot u(\Delta - 1 - k)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= [u(\Delta-1), u(\Delta-2) \dots u(1), u(0)]^T \\ \mathcal{C}_\Delta &= [\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \dots \mathbf{A}^{\Delta-1}\mathbf{b}] \end{aligned}$$

kann die Nebenbedingung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\mathcal{C}_\Delta \mathcal{U} - \mathbf{x}_r = \mathbf{0}$$

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix II

Die Optimierungsaufgabe mit Beschränkung kann unter Einführung eines Lagrange Multiplikators auf eine Optimierungsaufgabe ohne Beschränkung zurückgeführt werden:

$$J = \frac{1}{2}\mathcal{U}^T\mathcal{U} \; + \; \lambda^T(\mathcal{C}_\Delta\mathcal{U} - \mathbf{x}_r)$$

Partielle Ableitung nach $\mathcal{U}$ und λ liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^* + (\lambda^*)^T \cdot \mathcal{C}_\Delta &= \mathbf{0} \\ \mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{U}^* - \mathbf{x}_r &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Somit kann die optimale Steuersequenz wie folgt ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{U}^* &= \mathbf{x}_r \\ \Rightarrow \mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{U}^* &= (\mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{C}_\Delta^T) \cdot (\mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{C}_\Delta^T)^{-1} \cdot \mathbf{x}_r \\ \Rightarrow \mathcal{U}^* &= \mathcal{C}_\Delta^T \cdot (\mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{C}_\Delta^T)^{-1} \cdot \mathbf{x}_r \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_\Delta^T \cdot (\mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{C}_\Delta^T)^{-1}$ ist die *Penrose-Moore Pseudoinverse* der Rechtecksmatrix $\mathcal{C}_\Delta$.

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix III

Wir nennen $\mathcal{C}_\Delta \cdot \mathcal{C}_\Delta^T$ die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix:

$$\mathcal{G}_c(\Delta) = \mathcal{C}_\Delta \mathcal{C}_\Delta^T.$$

Somit:

$$\mathcal{G}_c(\Delta) = \sum_{k=0}^{\Delta-1} \mathbf{A}^k \mathbf{b} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^k)^T$$

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix IV

Häufig optimieren wir über eine unendliche Zeitspanne:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_c &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b}\mathbf{b}^T (\mathbf{A}^k)^T \\
&= \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b}\mathbf{b}^T (\mathbf{A}^k)^T \\
&= \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{A} \cdot \{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b}\mathbf{b}^T (\mathbf{A}^{k-1})^T\} \cdot \mathbf{A}^T \\
&= \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{A} \cdot \{\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \mathbf{b}\mathbf{b}^T (\mathbf{A}^k)^T\} \cdot \mathbf{A}^T \\
&= \mathbf{b}\mathbf{b}^T + \mathbf{A} \cdot \mathcal{G}_c \cdot \mathbf{A}^T
\end{aligned}$$

Somit erfüllt $\mathcal{G}_c$ die algebraische diskrete Lyapunov Gleichung:

$$\mathbf{A}\mathcal{G}_c\mathbf{A}^T - \mathcal{G}_c = -\mathbf{b}\mathbf{b}^T$$

Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix V

Ein diskretes System ist dann und nur dann voll erreichbar, wenn die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix den vollen Rang hat.

Die numerische Prüfung der Erreichbarkeit wird besser auf diesem Wege erreicht als über die gewöhnliche Steuerbarkeitsmatrix, da das Verfahren numerisch wesentlich besser konditioniert ist.

In Praxis wird die Gram'sche Steuerbarkeitsmatrix immer über die diskrete Lyapunov Gleichung bestimmt.

Stabilisierbarkeit

Ein diskretes System ist stabilisierbar, wenn es voll erreichbar ist ($\rightarrow$ pole placement) oder wenn die Eigenwerte der Systemmatrix, $\mathbf{A}_{ne}$, des nicht erreichbaren Subsystems innerhalb des Einheitskreises liegen.