Abtastsysteme im Bildbereich III

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

June 8, 2006

Die inverse z-Transformation

Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion

Die inverse z-Transformation

Partialbruchzerlegung:

$$F(z) = \frac{-0.4z^2 + 1.08z}{(z+0.5)(z-0.3)^2}$$

$$\frac{F(z)}{z} = \frac{-0.4z + 1.08}{(z+0.5)(z-0.3)^2} = \frac{2}{z+0.5} - \frac{2}{z-0.3} + \frac{1.2}{(z-0.3)^2}$$

$$F(z) = \frac{2z}{z+0.5} - \frac{2z}{z-0.3} + \frac{1.2z}{(z-0.3)^2}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = \{f(k)\} = \{2(-0.5)^k - 2(0.3)^k + 4k(0.3)^k\}$$

Diskrete Signale

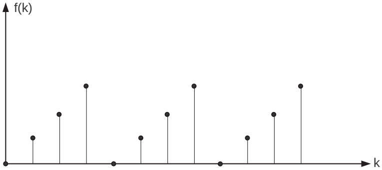

Figure: Diskretes Signal

$$
\begin{aligned}
f(k) &= \{0, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\
\Rightarrow F(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + z^{-5} + 2z^{-6} + \dots \\
&= [z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}] \cdot (1 + z^{-4} + z^{-8} + \dots) \\
&= [z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}] \cdot \frac{1}{1 - z^{-4}} \\
\Rightarrow F(z) &= \frac{z(z^2 + 2z + 3)}{(z^4 - 1)}
\end{aligned}
$$

Divisionsalgorithmus

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \frac{z+2}{z-0.5} = 1 + \frac{5}{2}z^{-1} + \frac{5}{4}z^{-2} + \frac{5}{8}z^{-3} + \ldots \\
\Rightarrow f(k) &= \{1, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots
\end{aligned}
$$

Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k)$$

$$\circ\!\!-\!\!\bullet$$

$$\begin{aligned}
z\mathbf{x}(z) - z\mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(z) + \mathbf{b}U(z) \\
\mathbf{x}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}U(z) + z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)
\end{aligned}$$

Für die Ausgangsgleichung:

$$\begin{aligned}
y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(z) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(z) + dU(z) \\
Y(z) &= [\mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d]U(z) + \mathbf{c}^T z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0)
\end{aligned}$$

Im ersten Term erkennen wir die Übertragungsfunktion $G(z)$:

$$G(z) = \mathbf{c}^T(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \tag{1}$$

Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion II

$$G(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 3z}{z^4 - 1} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)} \cdot \frac{X(z)}{U(z)}$$

Wir wählen:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} \Rightarrow \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{z^3}{z^4 - 1}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow z^4 X(z) - X(z) &= z^3 U(z) \\
\Rightarrow x(k+4) - x(k) &= u(k+3) \\
\Rightarrow x(k+1) - x(k-3) &= u(k)
\end{aligned}$$

Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion III

Wir wählen:

$$\xi_1(k) = x(k-3) \; ; \; \xi_2(k) = x(k-2) \; ; \; \xi_3(k) = x(k-1) \; ; \; \xi_4(k) = x(k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \xi_1(k+1) &= \xi_2(k) \\ \xi_2(k+1) &= \xi_3(k) \\ \xi_3(k+1) &= \xi_4(k) \\ \xi_4(k+1) &= \xi_1(k) + u(k) \end{aligned}$$

Somit:

$$\xi(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot u(k)$$

Zustandsraumdarstellung und Übertragungsfunktion IV

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow Y(z) &= X(z) + 2z^{-1}X(z) + 3z^{-2}X(z) \\
\Rightarrow y(k) &= x(k) + 2x(k-1) + 3x(k-2) \\
\Rightarrow y(k) &= \xi_4(k) + 2\xi_3(k) + 3\xi_2(k)
\end{aligned}$$

Somit:

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \xi(k)$$