Abtastsysteme im Bildbereich II

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

June 8, 2006

Laplace Transformation von Abtastsignalen

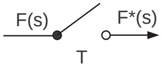

Figure: Laplace Transformation eines Abtastsignals

Beispiel: $f(t) = \varepsilon(t) \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) \\
\Rightarrow F^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = 1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \ldots \\
&= \frac{1}{1-e^{-Ts}}
\end{aligned}$$

Laplace Transformation von Abtastsignalen II

2. Beispiel: $F(s) = \frac{1}{s+a} \Rightarrow f(t) = e^{-at} \cdot \varepsilon(t)$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow f^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \cdot \delta(t - kT) \\
\Rightarrow F^*(s) &= 1 + e^{-aT} \cdot e^{-Ts} + e^{-2aT} \cdot e^{-2Ts} + \ldots \\
&= 1 + e^{-T(s+a)} + e^{-2T(s+a)} + \ldots \\
&= \frac{1}{1 - e^{-T(s+a)}} = \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot e^{-Ts}}
\end{aligned}
$$

Im Allgemeinen wird die Partialbruchzerlegung angewandt, um $F(s)$ zu zerlegen.

Danach kann jeder Term separat behandelt werden.

z-Transformation von Abtastsignalen

Wir führen eine Abkürzung ein: $z = e^{Ts} \Leftrightarrow z^{-1} = e^{-Ts}$

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot e^{-Ts}} \\ \Rightarrow F(z^{-1}) &= \frac{1}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}} \\ \Rightarrow F(z) &= \frac{z}{z - e^{-aT}} \end{aligned}$$

Die z-Transformation ist *keine* neue Transformation, sondern eine gewöhnliche Laplace Transformation in einer neuen unabhängigen Grösse.

Das Verzögerungsglied

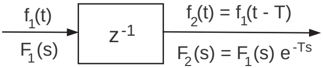

Figure: Verzögerungsglied

Wenn ein beliebiges (auch nicht abgetastetes) Signal im Bildbereich mit z^{-1} multipliziert wird, entspricht dies im Zeitbereich einer Verzögerung um T Zeiteinheiten.

Laplace Transformation von Abtastsystemen

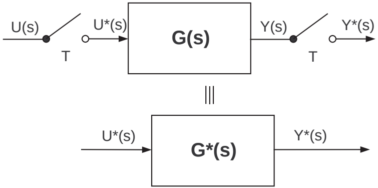

Figure: Laplace Transformation eines Abtastsystems

$$
\begin{aligned}
u^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot \delta(t - kT) \\
\Rightarrow y(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot g(t - kT) \\
\Rightarrow y(mT) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(kT) \cdot g(mT - kT) \\
\Rightarrow y^*(t) &= g^*(t) * u^*(t)
\end{aligned}
$$

z-Transformation von Abtastsystemen II

$$
\begin{aligned}
U(z) &= \mathcal{Z}\{u^*(t)\} \\
Y(z) &= \mathcal{Z}\{y^*(t)\} \\
\Rightarrow G(z) &= \mathcal{Z}\{g^*(t)\} \\
\text{wobei } g(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}
\end{aligned}
$$

Laplace Transformation von Abtastsystemen III

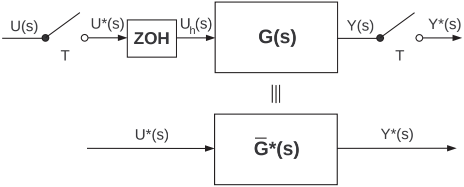

Figure: Laplace Transformation eines gehaltenen Abtastsystems

$$
\begin{aligned}
G_h(s) &= \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \\
\Rightarrow \bar{G}(s) &= G(s) \cdot G_h(s) = \frac{G(s)}{s} - e^{-Ts} \cdot \frac{G(s)}{s} \\
\Rightarrow \bar{G}(z) &= \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\} - \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{e^{-Ts} \cdot \frac{G(s)}{s}\}\} \\
&= \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\} - z^{-1} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}\}
\end{aligned}
$$

z-Transformation von Abtastsystemen IV

Mit der Abkürzung:

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\} = \mathcal{Z}\{G(s)\}$$

folgt:

$$\bar{G}(z) = (1 - z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\{\frac{G(s)}{s}\}$$