Abtastsysteme im Zustandsraum III

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

May 18, 2006

Zusammenschaltung von Systemen im Zustandsraum

Beispiel eines Abtastregelsystems

Zusammenschaltung von Systemen im Zustandsraum

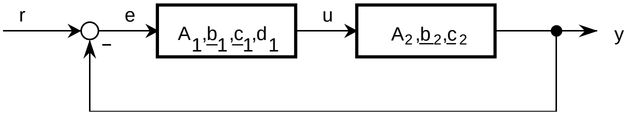

Figure: Zeitdiskreter Regler

$$R: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_1(k+1) &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(k) + \mathbf{b}_1 e(k) \\ u(k) &= \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1(k) + d_1 e(k) \end{aligned} \qquad S: \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(k) + \mathbf{b}_2 u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2(k) \end{aligned}$$

Zusammenschaltung von Systemen im Zustandsraum II

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \mathbf{x}_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{b}_1\mathbf{c}_2^T \\ \mathbf{b}_2\mathbf{c}_1^T & (\mathbf{A}_2 - \mathbf{b}_2 d_1 \mathbf{c}_2^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 d_1 \end{bmatrix} r(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{c}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \mathbf{x}_2(k) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Zusammenschaltung von Systemen im Zustandsraum III

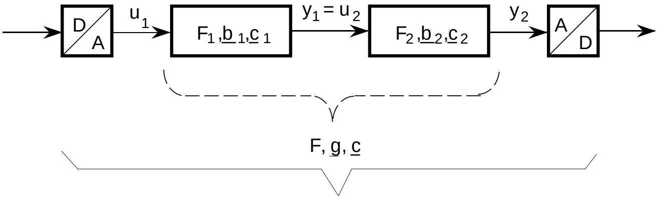

Figure: Kaskade

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\,T}, \qquad \mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\ \mathbf{g}\ d\tau$$

Die Kaskadierung von Abtastsystemen ist ungleich der Abtastung kaskadierter Systeme

Beispiel eines Abtastregelsystems

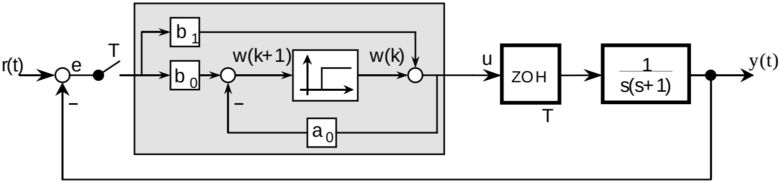

Figure: Regelkreis

$$
\begin{aligned}
w(k+1) &= -a_0 w(k) + (b_0 - a_0 b_1) e(k) \\
u(k) &= w(k) + b_1 e(k)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{F}\mathbf{v} + \mathbf{g}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= \mathbf{c}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Beispiel eines Abtastregelsystems II

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}\mathbf{v} + \mathbf{g}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \right\} \Big|_{t=T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau} \mathbf{g} \, d\tau = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 - e^{-\tau} \\ e^{-\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{v}(k) + \mathbf{b}u(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 - e^{-T} \\ 0 & e^{-T} \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \begin{bmatrix} T + e^{-T} - 1 \\ 1 - e^{-T} \end{bmatrix} u(k)$$

Beispiel eines Abtastregelsystems III

$$\begin{aligned}
v_1(k+1) &= v_1(k) + (1-e^{-T})v_2(k) + (T+e^{-T}-1)u(k) \\
v_2(k+1) &= e^{-T}v_2(k) + (1-e^{-T})u(k) \\
w(k+1) &= -a_0 w(k) + (b_0 - a_0 b_1)e(k) \\
u(k) &= w(k) + b_1 e(k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 1 & (1-e^{-T}) & (T+e^{-T}-1) \\ 0 & e^{-T} & (1-e^{-T}) \\ 0 & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1(T+e^{-T}-1) \\ b_1(1-e^{-T}) \\ b_0 - a_0 b_1 \end{bmatrix} e(k) \\
y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)
\end{aligned}$$

ist die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.

Beispiel eines Abtastregelsystems IV

$$e(k) = r(k) - x_1(k)$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} (1 - b_1(T + e^{-T} - 1)) & (1 - e^{-T}) & (T + e^{-T} - 1) \\ -b_1(1 - e^{-T}) & e^{-T} & (1 - e^{-T}) \\ (-b_0 + a_0 b_1) & 0 & -a_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1(T + e^{-T} - 1) \\ b_1(1 - e^{-T}) \\ b_0 - a_0 b_1 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

ist die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises.