Abtastsysteme im Zustandsraum

Prof. Dr. François E. Cellier
Institut für Computational Science
ETH Zürich

May 11, 2006

Die Beschreibung von Abtastsystemen

Kontinuierliches System:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) \end{aligned}$$

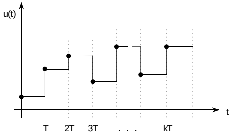
Lösung im Zeitbereich:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}\ u(\tau)\ d\tau$$

Die Beschreibung von Abtastsystemen II

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}\ u(\tau)\ d\tau$$

Das Eingangssygnal ist treppenförmig:



$$u(t) = u(kT) \quad \text{für} \quad kT \leq t < (k+1)T \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-kT)}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}\ d\tau\ u(kT)$$

Die Beschreibung von Abtastsystemen III

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{F}(t-kT)}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{t} e^{\mathbf{F}(t-\tau)}\mathbf{g}\; d\tau\; u(kT)$$

Für den nächsten Abtastzeitpunkt $t = (k+1)T$ resultiert:

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{\mathbf{F}(kT+T-kT)}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{\mathbf{F}(kT+T-\tau)}\mathbf{g}\; d\tau\; u(kT)$$

Mit der Substitution $v := kT + T - \tau$ folgt:

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(kT) + \int_{0}^{T} e^{\mathbf{F}v}\mathbf{g}\; dv\; u(kT)$$

Die Beschreibung von Abtastsystemen IV

$$\mathbf{x}(kT+T) = e^{\mathbf{F}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{F}v}\mathbf{g}\; dv\;\; u(kT)$$

Somit:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(kT+T) &= \mathbf{Ax}(kT) + \mathbf{b}u(kT) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(kT) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(kT) + du(kT) \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= e^{\mathbf{F}T} \\ \mathbf{b} &= \int_0^T e^{\mathbf{F}\tau}\mathbf{g}\; d\tau \end{aligned}$$

Lineare und nichtlineare Systeme

$$\mathbf{x}(k) := \mathbf{x}(kT)$$

Lineares System:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{b}u(k) \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(k) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(k) + du(k) \end{aligned}$$

Nichtlineares System:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= \mathbf{g}[\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k] \end{aligned}$$

Ähnlichkeitstransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Pi}\hat{\mathbf{x}}$$

Kontinuierliches System:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{\Pi} \\ \hat{\mathbf{g}} &= \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{g} \\ \hat{\mathbf{c}}^T &= \mathbf{c}^T\mathbf{\Pi}\end{aligned}$$

Diskretes System:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{\Pi} = e^{\hat{\mathbf{F}}T} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{\Pi}^{-1}\mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{c}}^T &= \mathbf{c}^T\mathbf{\Pi}\end{aligned}$$

Berechnung der Transitionsmatrix

$$\mathbf{x}(t_0 + t) = \phi(t)\mathbf{x}(t_0)$$

wobei:

$$\phi(t) = e^{\mathbf{F}t} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - \mathbf{F})^{-1}\right]$$

Spezialfall:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T} = \phi(T)$$

Berechnung der Transitionsmatrix II

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T} = \phi(T)$$

Berechnungsmethoden:

- Reihenentwicklung $\quad e^{\mathbf{F}T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{F}T)^k}{k!}$
- Integration $\quad \frac{d}{dt}\phi(t) = \mathbf{F}\phi(t), \quad \phi(0) = I$
- Eigenwert/Eigenvektor-Methode (EW/EV) (siehe später)

Referenz:

Moler, C. and C. van Loan (2003), "Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix - Twenty-Five Years Later," *SIAM Journals Online*, **45**(1), pp.3-49.

http://epubs.siam.org/SIREV/volume-45/art_41801.html

Eigenwert/Eigenvektor-Methode

Spektralzerlegung:

$$\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$$

wobei $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots]$ die Eigenvektoren $\mathbf{u}_i$ und $\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ die zugehörigen Eigenwerte von $\mathbf{F}$ beinhaltet.
Dann ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = e^{\mathbf{F}T} &= \mathbf{U}\ e^{\mathbf{\Lambda}T}\ \mathbf{U}^{-1} \\ e^{\mathbf{\Lambda}T} &= \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_i T}\right) \end{aligned}$$

Stabilität

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\,T} &= \mathbf{U}\;e^{\mathbf{\Lambda}\,T}\;\mathbf{U}^{-1} \\ e^{\mathbf{\Lambda}\,T} &= \mathrm{diag}\;(e^{\lambda_i\,T}) \end{aligned}$$

Da:

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{F}\,T}$$

gilt:

$$\Re\mathrm{e}\{\mathrm{eig}(\mathbf{F})\} < 0 \Leftrightarrow |\mathrm{eig}(\mathbf{A})| < 1$$

Lösung im Zeitbereich

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}u(0) \\
\mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{b}u(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{b}u(0) + \mathbf{b}u(1) \\
&\vdots \\
\mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}\; u(k-i)
\end{aligned}$$

Darum:

$$y(k) = \mathbf{c}^T\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0) + \sum_{i=1}^{k} \mathbf{c}^T\mathbf{A}^{i-1}\mathbf{b}u(k-i) \; + du(k) \tag{1}$$

Dies sieht ganz ähnlich aus wie das Faltungsintegral der kontinuierlichen Systeme.

Lösung im Zeitbereich II

Wählen wir für $\{u(k)\}$ einen Einheitsimpuls $\{\delta(k)\}$:

$$\{\delta(k)\} = \{1, 0, 0, \dots\} \qquad (k \geq 0)$$

mit Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = 0$, so erhalten wir am Ausgang definitionsgemäss die Gewichtsfolge $\{g(k)\}$ – *die Stossantwort*:

$$\begin{aligned} g(k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{c}^T \; \mathbf{A}^{i-1} \; \mathbf{b} \; \delta(k-i) \; + d \; \delta(k) \\ &= \begin{cases} d & k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & k \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Lösung im Zeitbereich III

$$g(k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{i-1} \mathbf{b}\, \delta(k-i) + d\, \delta(k)$$

$$= \begin{cases} d & k = 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{b} & k \geq 1 \end{cases}$$

Somit:

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^k \mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{k} g(i) u(k-i)$$